

# REFRAZIONE SOGGETTIVA: UN NUOVO METODO VETTORIALE PER LA DETERMINAZIONE DEL CILINDRO (1/3)

La tecnica di refrazione utilizzata per determinare il cilindro di correzione di una prescrizione è cambiata molto poco negli anni. La ragione principale di ciò è il limite imposto dai forotteri soggettivi che fanno alternare le lenti ad incrementi di 0,25 diottrie.

Oggi, grazie al forottero a variazioni continue di potere che consentono un'azione simultanea e precisa sulla sfera, sul cilindro e sull'asse di correzione, è possibile sviluppare nuove tecniche di refrazione.

Questa serie di tre articoli descrive i principi di un nuovo metodo vettoriale per la determinazione del cilindro di correzione e illustra la logica di un algoritmo automatizzato per la ricerca del cilindro ad esso associato.



**Hélène Starynkevitch**

Responsabile degli studi R&S  
Divisione Strumenti  
Essilor International

Hélène Starynkevitch ha conseguito il diploma di Ottico-Oftalmologo presso l'Institut et Centre di Bures-sur-Yvette (2013) e successivamente in Ingegneria Sanitaria, Specializzazione in Scienza della visione, presso l'Université d'Orsay Paris Sud XI (2016). Attualmente è un'ingegnere ricercatrice presso il dipartimento R&S di Essilor Instruments. Sta lavorando allo sviluppo di metodi e algoritmi di esami oculistici eseguiti con nuovi strumenti e alla progettazione di interfacce per gli ottici. È inoltre responsabile degli studi di optometria, relativi al confronto strumentale e/o delle metodologie di esame oculistico. Hélène ha fatto inoltre volontariato per VisionSoliDev, offrendo esami oculistici a persone svantaggiate.



**Gildas Marin**

Responsabile degli studi R&S  
Dipartimento R&S Scienze della Visione  
Essilor International

Gildas Marin ha conseguito la laurea in ingegneria ottica nel 1993 e ha proseguito gli studi con una tesi in imaging medico sostenuta nel 1997 presso l'Institut d'Optique, in collaborazione con l'Ospedale della Pitié-Salpêtrière (Parigi). Dal 2006 è Responsabile degli studi in Scienze della visione presso Essilor International. Le sue principali aree di ricerca sono la modellizzazione della vista, la simulazione degli effetti ottici e delle prestazioni visive, in particolare l'impatto delle aberrazioni ottiche sulla vista. Ultimamente, ha lavorato al miglioramento dei metodi di refrazione. A partire dal 2015 è stato responsabile del programma di ricerca sullo sviluppo e la convalida di algoritmi e metodi di refrazione di precisione implementati nel Vision-R™ 800 e nelle lenti AVA™ (Advanced Vision Accuracy).



**Dominique Meslin**

Direttore delle Soluzioni di refrazione  
Divisione Strumenti  
Essilor International

Ottico e optometrista, Dominique Meslin ha trascorso la maggior parte della sua carriera presso Essilor, inizialmente nel dipartimento di Ricerca e Sviluppo e successivamente rivestendo diversi ruoli di marketing e tecniche di comunicazione in Francia e negli Stati Uniti. È stato per 10 anni direttore della Essilor Academy Europe e successivamente responsabile delle relazioni professionali presso Essilor Europe. Oggi è direttore delle nuove Soluzioni di refrazione per la Divisione Strumenti di Essilor International. Nel corso della sua carriera, Dominique ha condotto numerosi seminari per i professionisti della vista. È autore di varie pubblicazioni scientifiche e di numerose pubblicazioni tecniche di Essilor, tra cui spicca la collana dei "Cahiers d'Optique Oculaire".

Per quasi un secolo, la tecnica di refrazione utilizzata per determinare il cilindro di correzione di un cliente è cambiata molto poco. Consiste solitamente nell'utilizzare un cilindro crociato chiamato "cilindro di Jackson" e nello studiare la variazione dei suoi effetti rispetto a diverse posizioni, al fine di ricercare l'asse del cilindro, il suo potere e, successivamente, di regolare il suo effetto sul potere della sfera. Se questa tecnica è rimasta pressoché invariata dalla sua invenzione, è essenzialmente perché i forotteri soggettivi sono cambiati poco: per quasi un secolo, hanno permesso solo di presentare lenti sferiche e cilindriche davanti agli occhi di un cliente, con incrementi di potere di 0,25 diottrie e di 5 gradi dell'asse, senza che fosse possibile agire contemporaneamente sulla sfera, sul cilindro e sull'asse della correzione.

Oggi, grazie a nuovi forotteri a variazioni continue di potere, con una risoluzione di 0,01 diottrie sul potere e 0,1 gradi sull'asse, che permettono di agire contemporaneamente sulla sfera, sul cilindro e sul suo asse<sup>(\*)</sup>, è possibile proporre un nuovo approccio alla refrazione soggettiva, denominato "Digital Infinite Refraction™"<sup>(1)</sup>. È stato quindi sviluppato un metodo vettoriale, più coerente e più preciso, per la determinazione del cilindro. Lo scopo di questa pubblicazione è quello di presentarne i principi e di spiegarne la logica.

In questo primo articolo, ricorderemo la definizione vettoriale di refrazione e la sua rappresentazione nello "Spazio Diottrico". Successivamente, confronteremo i metodi generali della "Refrazione Tradizionale" e della "Digital Infinite Refraction™".

In un secondo articolo descriveremo in dettaglio le tecniche utilizzate nella "Refrazione Tradizionale" e nella "Digital Infinite Refraction™" per determinare l'asse e il potere del cilindro. Infine, nel terzo ed ultimo articolo, descriveremo il principio e la logica del nuovo metodo di determinazione del cilindro proposto dalla "Digital Infinite Refraction™",

## PAROLE CHIAVE

Refrazione soggettiva, refrazione vettoriale, spazio diottrico, ricerca del cilindro, cilindri crociati, forottero, algoritmo di refrazione, Vision-R™ 800.

(\*) Forottero Vision-R 800 a variazioni continue di potere sviluppato da Essilor Instruments.

rispetto al metodo della Refrazione tradizionale e discuteremo della sua applicazione nello sviluppo di un algoritmo automatizzato per la determinazione del cilindro.

Vi invitiamo quindi a scoprire in dettaglio questo nuovo metodo vettoriale per la determinazione del cilindro di correzione. Si noti che per una perfetta comprensione del contenuto di questo articolo è necessario avere una buona conoscenza e comprensione dei principi classici di base della refrazione.

## 1) Rappresentazione vettoriale del cilindro in uno spazio diottrico

### “Espressione polare” vs. “Espressione cartesiana” della refrazione:

Tradizionalmente, nel campo dell’ottica oftalmica, si è soliti esprimere la formula di una refrazione mediante la sua “espressione polare” (sfera, cilindro e asse), ma è anche possibile usare un’ “espressione cartesiana” sotto forma di 3 coordinate:

- 1) la sfera equivalente o sfera media  $M$ , pari al potere della sfera aumentato della metà di quello del cilindro,
- 2) la componente del cilindro lungo l'asse orizzontale a  $0^\circ$  ( $J0^\circ$ ), che rappresenta la componente diretta/indiretta dell'astigmatismo,
- 3) la componente obliqua del cilindro lungo l'asse obliquo a  $45^\circ$  ( $J45^\circ$ ), che rappresenta la componente obliqua dell'astigmatismo.

Questa “espressione cartesiana” ha il vantaggio di esprimere la formula refrattiva sotto forma di 3 componenti indipendenti l'una dall'altra ed espresse tutte e tre in un'unica e coerente unità, la diottria. Il vantaggio di queste componenti è che possono sostituire quelle dell’espressione polare classica della refrazione, ovvero sfera, cilindro e asse, che sono interdipendenti ed espresse in unità diverse, in diottrie per la sfera e il cilindro e in gradi per l'asse. Inoltre, l'espressione cartesiana offre alla refrazione una formula globale unica che facilita la sua analisi e i confronti statistici<sup>(2)</sup>.

A titolo illustrativo, è possibile consultare la Tabella 1, che fornisce alcuni esempi di trasposizione in coordinate cartesiane di formule di refrazione espresse in coordinate polari classiche. Leggendo questa tabella, possiamo constatare che l'espressione cartesiana di una formula refrattiva consiste, in un certo senso, nell'esprimere la refrazione sotto forma di componente media e di due componenti cilindriche pure, vale a dire le cui sfere medie sono zero e simili alle formule dei cilindri crociati di Jackson, di cui una, a  $0^\circ/90^\circ$ , rappresenta la componente orizzontale/verticale dell'astigmatismo e l'altra, a  $45^\circ/135^\circ$ , rappresenta la componente obliqua dell'astigmatismo.

La relazione tra le due espressioni polari e cartesiane di una stessa formula di refrazione è un semplice calcolo trigonometrico ed è relativamente facile spostarsi da un'espressione all'altra:

– Se si conosce la formula polare classica della refrazione  $Sf$  (Cil) Asse, si possono calcolare le tre coordinate della sua espressione cartesiana mediante le seguenti 3 formule:

- $M = Sf + Cil / 2$ ;
- $J0^\circ = Cil * Cos (2 * Asse)$ ;
- $J45^\circ = Cil * Sin (2 * Asse)$ .

Si noterà che a causa del ciclo non trigonometrico dell'asse, vale a dire la sua variazione da  $0^\circ$  a  $180^\circ$  e non da  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , è necessario raddoppiare il valore dell'asse del cilindro.

– Viceversa, se si conoscono le due componenti cartesiane del cilindro,  $J0^\circ$  e  $J45^\circ$ , è facile trovare le sue componenti polari, cilindro e asse, mediante composizione vettoriale; per la sfera è invece sufficiente sottrarre algebricamente metà del valore del cilindro da quello della sfera equivalente, per trovarne il valore. Le formule sono quindi le seguenti, per convenzione con cilindro negativo:

- $Sf = M - Cil / 2$
- $Cil = -\sqrt{J0^{o2} + J45^{o2}}$
- $Asse = 0,5 * ArcTan (J45^\circ / J0^\circ) + C$ , con C costante pari a  $90$  se  $J0^\circ > 0$  e pari a  $0$  se  $J0^\circ < 0$ .

Per semplicità di comprensione e facilità di rappresentazione grafica, in questo articolo abbiamo scelto di non mantenere una ponderazione di  $1/2$  tra i valori delle componenti  $J0^\circ$  e  $J45^\circ$  del cilindro, da un

Tabella 1: Espressioni polare e cartesiana delle varie formule di refrazione

ESPRESSIONE POLARE			ESPRESSIONE CARTESIANA		
Sfera	Cilindro	Asse	M	J0°	J45°
+2,00			+2,00	0,00	0,00
-2,00			-2,00	0,00	0,00
Piano	-2,00	0	-1,00	-2,00	0,00
Piano	-2,00	90	-1,00	+2,00	0,00
Piano	-2,00	45	-1,00	0,00	-2,00
Piano	-2,00	135	-1,00	0,00	+2,00
+1,00	-2,00	120	0,00	+1,00	+1,73
+1,00	-2,00	30	0,00	-1,00	-1,73

lato, e il potere sferico equivalente  $M$ , dall'altro, come avviene generalmente in letteratura sull'espressione vettoriale della refrazione. Il principio rimane lo stesso, ma la comprensione ne risulta facilitata.

**Rappresentazione della refrazione in uno "Spazio Diottrico":**

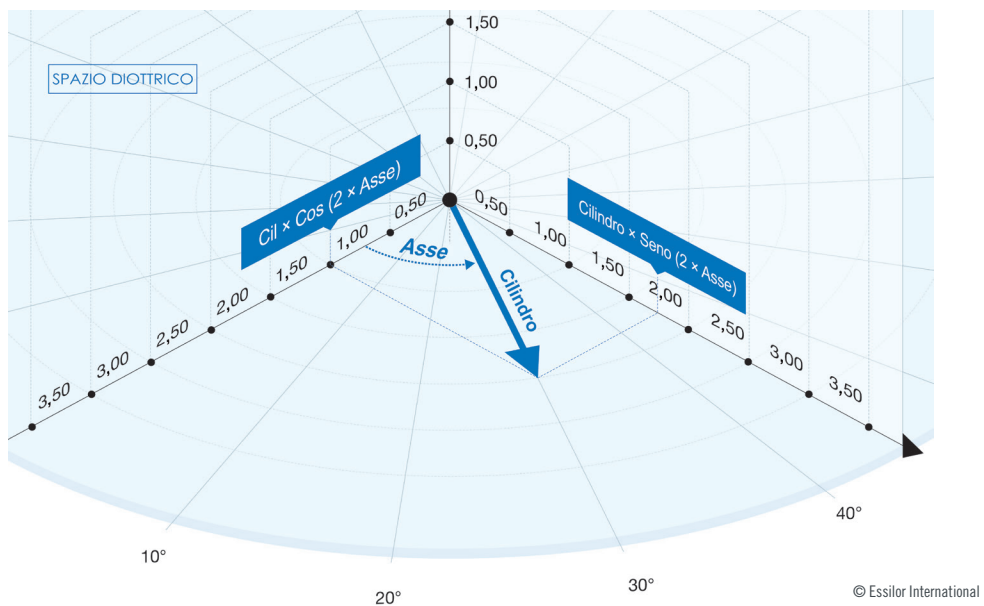
Il vantaggio dell'espressione cartesiana della refrazione è che permette di rappresentare qualsiasi formula refrattiva in un quadro di riferimento ortogonale tridimensionale chiamato "Spazio Diottrico". La refrazione è rappresentata da un unico vettore, le cui proiezioni sui 3 assi di riferimento sono le coordinate cartesiane della formula di refrazione.

- Pertanto, vengono raffigurati secondo 3 assi:
- il potere sferico equivalente, o sfera media  $M$ ,
  - la componente orizzontale del cilindro  $J0^\circ$ ,
  - la componente obliqua del cilindro  $J45^\circ$ .

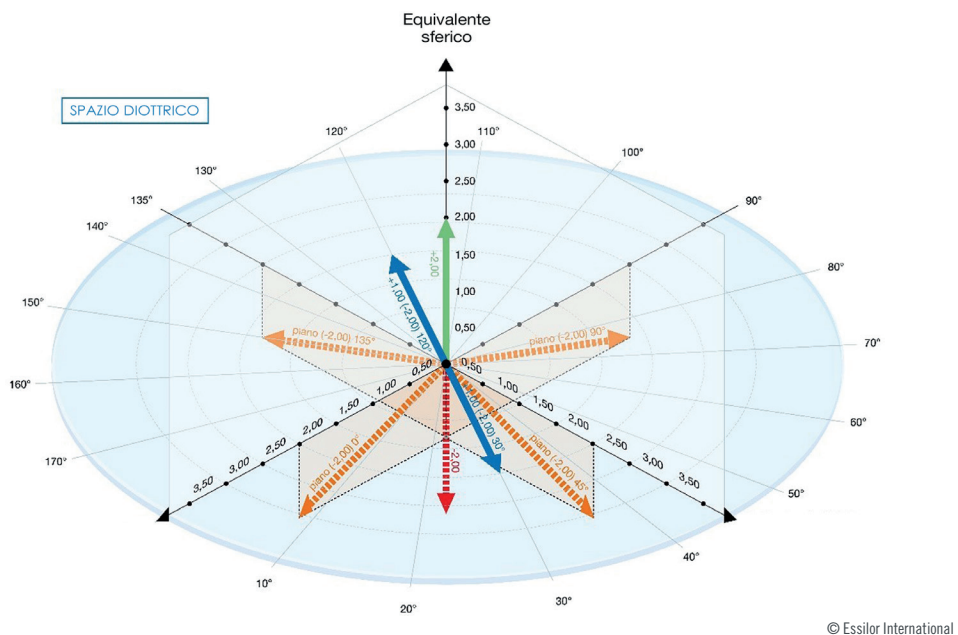
La rappresentazione tridimensionale dello Spazio Diottrico mostrata nella Figura 1 è una versione adattata della rappresentazione convenzionale, la cui spiegazione dettagliata si può trovare in varie pubblicazioni di riferimento<sup>(2, 3, 4, 5)</sup>. Questa rappresentazione consente di visualizzare semplicemente, in 3 dimensioni, le caratteristiche di qualsiasi formula refrattiva. La sfera è espressa lungo l'asse "verticale" e il cilindro lungo un piano "orizzontale": l'asse del cilindro è rappresentato

**Figura 1: Rappresentazione vettoriale della refrazione in uno "Spazio Diottrico"**

(a) Coordinate cartesiane: esempio di una formula di refrazione di +1,00 (-2,00) 30°



b) Esempi di rappresentazioni vettoriali delle varie formule di refrazione



(formule presentate nella tabella 1)  
 Formule sferiche: +2,00 (in verde) e -2,00 (in rosso);  
 Formule astigmatiche: piano (-2,00) con assi di cilindro a 0°, 45°, 90°, 135° (in arancione)  
 e +1,00 (-2,00) con assi cilindro a 30° e 120° (in blu).

dalla rotazione attorno all'asse verticale e il potere del cilindro dalla distanza dall'origine, qui scelta in convenzione di cilindro negativo. Questa rappresentazione permette di rappresentare semplicemente qualsiasi formula di refrazione sotto forma di un vettore unico nello spazio e di studiarne le variazioni durante la refrazione: questo è lo scopo della "Refrazione vettoriale".

L'esempio fornito nella parte successiva di questo articolo, di una formula di refrazione di +1,00 (-2,00) 30° con potere sferico equivalente zero, è stato scelto per comodità di rappresentazione grafica, poiché il vettore corrispondente è situato nel piano orizzontale J0° / J45°. Per qualsiasi altra refrazione, il cui potere sferico equivalente non sia pari a zero, la logica sarebbe la stessa ma il vettore evolverebbe nello spazio lasciando una traccia identica a quella descritta nel piano J0°/J45° ma in un piano orizzontale parallelo ad esso, corrispondente al valore del potere sferico equivalente.

## 2) "Refrazione tradizionale" vs. "Digital Infinite Refraction™": similitudini e differenze.

Benché le due tecniche di refrazione "tradizionale" e "digitale" impieghino alcuni principi comuni, esse differiscono fundamentalmente per alcuni aspetti. Prendiamo in esame le loro somiglianze e differenze, prima di affrontarle in modo più dettagliato nei due articoli seguenti:

### a) Refrazione mediante "presentazioni delle lenti" vs. refrazioni mediante "variazioni continue di potere":

- La tecnica di refrazione "tradizionale" viene eseguita presentando lenti sferiche e cilindriche davanti all'occhio del cliente. Può essere condotta indifferentemente mediante occhiali e lenti di prova, mediante forotteri "manuali" con scorrimento meccanico delle lenti o con forotteri "automatizzati" con scorrimento motorizzato delle lenti. Indipendentemente dagli strumenti utilizzati, il metodo di refrazione rimane sostanzialmente lo stesso e le lenti sono proposte con incrementi di 0,25 diottrie, cambia solo la loro modalità di presentazione. Inoltre, la sfera, l'asse e il potere del cilindro possono essere esaminati solo separatamente e vengono quindi eseguiti uno dopo l'altro durante l'esame della refrazione.
- Al contrario, la tecnica "digitale" sfrutta le capacità di un modulo ottico a variazioni continue di potere, controllato da micromotori a comandi digitali. Questa tecnologia permette di passare istantaneamente da una formula ottica all'altra modificando i poteri ottici e con l'incremento di variazione desiderato, con una risoluzione di 0,01 D. Inoltre è possibile agire sulla sfera, sull'asse del cilindro e sul suo potere in modo perfettamente simultaneo; si può quindi passare istantaneamente e continuamente da una formula correttiva all'altra. Questa proprietà è all'origine della nuova tecnica di refrazione.

### b) Determinare le componenti di refrazione in modo successivo rispetto al modo simultaneo:

- "Nella tecnica di refrazione "tradizionale", per determinare la sfera, l'asse del cilindro e il suo potere si procede in modo successivo, arrivando infine a regolare la sfera. La determinazione del cilindro viene necessariamente effettuata nell'ordine "asse cilindro" e poi "potere cilindro" perché, in mancanza di questo, potrebbe risultare impossibile trovare il suo potere corretto. Ciò avviene perché, per quanto sia possibile regolare e trovare il valore corretto dell'asse di un cilindro se il suo potere è impreciso, regolare il potere di un cilindro con un asse impreciso si traduce in un valore diverso da quello che si otterrebbe con l'asse corretto. Ecco perché, nel metodo di refrazione "tradizionale", l'asse del cilindro viene sempre determinato prima di quello del potere del cilindro.
- Nella tecnica "digitale" della refrazione si cerca prima la sfera media e poi, nella stessa sequenza, il potere e l'asse del cilindro, mantenendo esattamente costante l'equivalente sferico, con una risoluzione di 0,01 D. A tal fine si considerano due componenti della refrazione: una "componente di potere" lungo l'asse iniziale della correzione e una "componente di asse" perpendicolare ad essa nello spazio diottrico. Poiché queste componenti di potere e asse sono ortogonali e indipendenti l'una dall'altra, la determinazione del cilindro può essere effettuata indifferentemente a partire dalla componente di asse o dalla componente di potere. Detto questo, le misurazioni iniziali della refrazione fornite dagli autorifrattometri sono generalmente più accurate in termini di valore dell'asse rispetto al valore del potere. Si è quindi scelto, nella nuova tecnica di refrazione "digitale", di iniziare la determinazione del cilindro con la componente di potere, in contrapposizione al metodo "tradizionale" che inizia sempre con la determinazione dell'asse. Si noti tuttavia che si sarebbe anche potuto fare nell'altro modo.

### c) Ricerca dell'astigmatismo: cilindri crociati "fisici" vs. "virtuali".

Le due tecniche di determinazione del cilindro, la refrazione tradizionale e la refrazione digitale, utilizzano i principi del metodo dei "cilindri crociati ribaltati" di Jackson, dal nome dell'oftalmologo americano che lo propose all'inizio del XX secolo, ma sono realizzati in modo diverso.

Va ricordato che il cilindro crociato è una lente sferica-cilindrica che deriva dalla combinazione di due lenti piano-cilindriche di identico potere ma di segno opposto e posizionate perpendicolarmente l'una rispetto all'altra, da qui il nome di "cilindri crociati", il cui equivalente sferico è zero. Il principio del metodo di ricerca del cilindro corretto è quello di presentare questo cilindro crociato davanti all'occhio del cliente, munito della sua correzione, e di studiare le variazioni di nitidezza visiva derivanti dalla combinazione dell'astigmatismo residuo del sistema occhio + lente e quello del cilindro crociato, per diverse posizioni di quest'ultimo.



Se gli utilizzi del metodo dei cilindri crociati nella refrazione “tradizionale” e nella refrazione “digitale” presentano somiglianze, le loro implementazioni sono molto diverse:

- Nella refrazione “tradizionale”, sono presenti dei cilindri crociati nel forottero che vengono variati di posizione durante l'esame. Vengono generalmente utilizzati cilindri crociati di  $\pm 0,25$  D o  $\pm 0,50$  D; le loro rispettive formule ottiche sono  $+0,25 (-0,50)$  e  $+0,50 (-1,00)$ . In virtù della sua costruzione, il “manico” di qualsiasi cilindro crociato unisce gli assi dei suoi cilindri positivi e negativi in modo tale che, mediante semplice ribaltamento, sia possibile invertire le loro posizioni; in altre parole, ruotare istantaneamente l'asse del cilindro crociato di  $90^\circ$  senza modificare il valore della sfera. Questa proprietà viene utilizzata per determinare l'asse del cilindro e successivamente il suo potere, ricercando l'orientamento dell'asse e poi il valore del potere per il quale la rotazione del cilindro crociato produce un'identica visione sfocata per il cliente. Torneremo su questa tecnica in dettaglio nel secondo articolo di questa serie.
- Nella refrazione “digitale” si utilizza un principio ottico simile ai cilindri crociati di Jackson ma, d'altra parte, nel forottero non sono fisicamente presenti cilindri crociati. Vengono prodotti effetti ottici del cilindro crociato “virtuale” nel modulo ottico mediante calcolo, in combinazione con la correzione ottica esistente. Non vi è quindi alcun posizionamento di un cilindro crociato davanti all'occhio del cliente, né interruzione della visione durante la sua rotazione, ma semplicemente delle modifiche nelle correzioni ottiche percepite istantaneamente e continuamente dal cliente. Inoltre, il potere del cilindro crociato utilizzato non è quello di un cilindro crociato convenzionale di  $\pm 0,25$  D o  $\pm 0,50$  D: può essere scelto con una risoluzione di  $0,01$  D per consentire un facile confronto tra le due posizioni ed essere configurato durante la progettazione dell'algoritmo per la ricerca del cilindro; potrebbe anche essere regolato durante la refrazione in funzione della sensibilità del cliente. Questa flessibilità offre notevoli possibilità di evoluzione e adattabilità dei metodi di refrazione. Nell'esempio che considereremo, nel corso di questa pubblicazione, il potere del cilindro crociato è  $\pm 0,35$  D.

Torneremo in dettaglio, nel secondo articolo, all'applicazione pratica di queste tecniche di determinazione del cilindro e alle loro differenze.

#### **d) Una tecnica tradizionale “immutabile” vs. una tecnica digitale “evolutiva”**

- Nella refrazione tradizionale, la tecnica di test e il metodo di ricerca del cilindro sono immutabilmente gli stessi da più di un secolo e hanno poche possibilità di evoluzione. I limiti fisici e i vincoli meccanici imposti dalla strumentazione non offrono spazi di manovra. Inoltre, la refrazione è interamente affidata all'ottico, che la esercita secondo la formazione che ha ricevuto, l'esperienza che ha accumulato e l'approccio che ha

adottato. Ciò si traduce inevitabilmente in una certa variabilità dei risultati della refrazione.

- Invece nella refrazione digitale, le tecniche di test e i metodi refrattivi utilizzati sono innovativi ed evolutivi. Infatti, grazie al controllo del modulo ottico mediante calcolo e alla sua totale flessibilità, un campo molto ampio di possibilità si apre allo sviluppo di nuovi metodi di refrazione. Sono stati inventati i primi algoritmi per aiutare a determinare la refrazione e formalizzare i primi principi dell'esame. Dovrebbero essere in grado di contribuire ad una certa standardizzazione dei metodi refrattivi. Questi algoritmi sono già adattivi, cioè hanno la capacità di adattarsi ai clienti, a seconda delle loro risposte durante l'esame stesso. Essi evolveranno con il progredire delle conoscenze e permetteranno di proporre, in futuro, molteplici soluzioni di aiuto alla refrazione. Il nuovo approccio del “Digital Infinite Refraction™” apre dunque un immenso campo di indagine e progresso nei metodi refrattivi.

*Continueremo a presentare e discutere questo argomento nei due articoli a seguire.*



#### **INFORMAZIONI CHIAVE:**

- La tecnica di determinazione del cilindro è cambiata poco da quando Jackson inventò il metodo dei “cilindri crociati” all'inizio del XX secolo, in ragione del fatto che gli stessi forotteri soggettivi basati sulla presentazione di varie lenti, sono cambiati molto poco.
- Oggi, grazie all'introduzione dei forotteri a “variazioni continue di potere”, è possibile proporre un nuovo metodo di determinazione del cilindro basato su un approccio “vettoriale” alla refrazione.
- Questo metodo esplora più direttamente lo spazio diottrico, cercando contemporaneamente il potere e l'asse del cilindro, mantenendo costante il potere sferico equivalente.
- Questa nuova tecnica, combinata con le proprietà di un modulo ottico altamente controllato e integrato in algoritmi di aiuto alla ricerca della refrazione, offre molte possibilità di evoluzione e di progresso nei metodi di refrazione.

#### **RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI:**

- (1) Longo A., Meslin D., Une nouvelle approche de la réfraction subjective, Cahiers d'Ophthalmologie, numéro 230, pp 59-63, (Sept 2019); A New approach to subjective refraction, in Points de Vue, Essilor International, www.pointsdevue.com (May 2020).
- (2) Thibos L. N., Wheeler W., Horner D., Power vectors: an application of Fourier analysis to the description and statistical analysis of refractive error. Optom Vis Sci. Jun;74(6):367-75 (1997).
- (3) Thibos, L. N., & Horner, D., Power vector analysis of the optical outcome of refractive surgery. Journal of Cataract & Refractive Surgery, 27(1), 80-85 (2001).
- (4) Touzeau O., Costantini E., Gaujoux T., Borderie V., Laroche L., Réfraction moyenne et variation de réfraction calculées dans un espace dioptrique, Journal français d'ophtalmologie, 33, 659-669 (2010).
- (5) Touzeau O., Scheer S., Allouch, Borderie V., Laroche L., Astigmatisme : analyses mathématiques et représentations graphiques, EMC – Ophtalmologie 1, pp 117-174, Elsevier (2004).